



Calculs d'aires, intégration

1. Calcul intégral : cas général

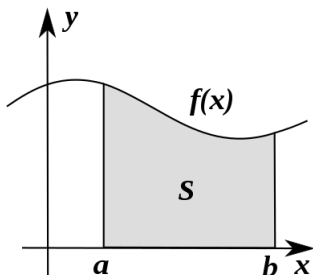
Propriété 6.1 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

L'aire algébrique comprise entre la courbe C_f et l'axe des abscisses, entre les valeurs $x = a$ et $x = b$, se note

$$\int_a^b f(x) dx$$

Et se calcule grâce à la primitive F de la fonction f . On a en effet :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



Exercice 6.1 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^4 x^3 dx$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\int_2^6 4x^2 - 2x + 1 dx$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. $\int_1^5 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

.....

4. $\int_2^4 \frac{1}{x+2} dx$

5. $\int_0^4 \frac{2x}{(x^2+3)^2} dx$

On appelle "aire algébrique" une aire qui peut éventuellement être négative : en effet, lorsque l'on calcule une intégrale, les surfaces sont orientées. et peuvent aboutir à un résultat positif ou négatif. L'encadré qui suit donne l'orientation des aires, mais le calcul d'aire en utilisant la primitive aboutit au "bon résultat" sans que ayez à calculer séparément le signe. Rappelez-vous simplement qu'une aire négative est un résultat valide.

Méthode Après avoir "découpé" l'intégrale de la fonction f à étudier en intervalles où f est de signe constant, on peut savoir si l'intégrale obtenue sur chacun de ces intervalles sera positive ou négative. Soit $[a; b]$ un intervalle sur lequel f est de signe constant. En suivant le "bord" de la surface correspondant à l'intégrale (on va de a vers b , puis on fait "tout le tour"), on obtient une courbe fermée orientée.

Si cette courbe est orientée dans le sens positif, alors $\int_a^b f(x)dx$ sera positif. Sinon, $\int_a^b f(x)dx$ sera négatif.



Les sens "positif" et "négatif" correspondent aux sens de parcours du cercle trigonométrique. On peut utiliser la "méthode de la main droite" (gauchers, méfiez-vous !):

Si votre pouce est vers vous, l'orientation est positive. Si votre pouce est vers la feuille, l'orientation est négative.

Le tableau suivant résume les différents cas possibles :

$\int_a^b f(x)dx \geq 0$	$\int_a^b f(x)dx \leq 0$	$\int_a^b f(x)dx \geq 0$	$\int_a^b f(x)dx \leq 0$

Exercice 6.2 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

2. $\int_3^7 x^2 + 2x - 9 dx$

.....

.....

.....

.....

.....

3. $\int_{-4}^{-1} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

.....

.....

.....

.....

.....

4. $\int_{-2}^2 x^3 + x dx$

.....

.....

.....

.....

.....

Remarque :

.....

.....

5. $\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right) dt$

.....

.....

.....

.....

.....

6. $\int_{-1}^1 e^{2t-1} dt$

.....

.....

.....

.....

.....

7. $\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

8. $\int_{-2}^4 (3x - 1)e^{1,5x^2 - x + 3} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

9. $\int_{-4}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+3} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

10. $\int_{-5}^{-4} \frac{2}{(2t+7)^2} dx$

.....

.....

.....

.....

.....

11. $\int_{e^{-1}}^e \frac{(\ln t)^2}{t} dt$

.....

.....

.....

.....

.....

12. $\int_0^4 \frac{2t}{\sqrt{t^2+3}} dt$

.....

.....

.....

.....

.....

2. Calcul intégral : propriétés

Propriété 6.2 (admise) Soit f et g deux fonctions définies, et continues sur un intervalle $[a; b]$. Alors on a :

- la relation de CHASLES pour les intégrales : pour tout $c \in [a; b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- l'inversion des bornes change le signe :

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

- la linéarité : pour tous α et β réels positifs,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

- l'ordre : si pour tout $x \in [a; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;
- la parité : si f est paire alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Exercice 6.3 1. Calculer $\int_{-1}^{\frac{1}{2}} (2t - 1)dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^3 (-2t + 1)dt$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. En déduire la valeur de $\int_{-1}^3 |-2t + 1|dt$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 6.4 Partie A : Démonstration.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a; b]$.

- Démontrer que pour tout $x \in [a; b]$, $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. En déduire que $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Partie B : Applications.

Les questions de cette partie sont indépendantes entre elles.

1. Calculer $\int_0^1 x e^x dx$

.....

.....

.....

.....

.....

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx$

.....

.....

.....

.....

.....

3. Reprendre deux fois de suite la méthode de la partie A pour calculer $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$ et $J = \int_{-1}^0 t^2 e^{\frac{t}{2}} dt$

.....

.....

.....

.....

.....

4. Reprendre la méthode de la partie A pour calculer $\int_0^x (t + 1)e^t dt$;
 en déduire la primitive de la fonction $x \mapsto (x + 1)e^x$ qui vaut 1 en 0.

.....

.....

.....

.....

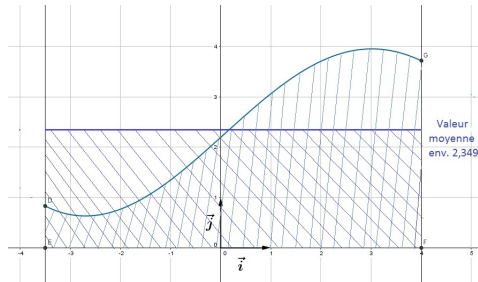
.....

3. Calcul intégral : valeur moyenne

Définition 6.1 Pour toute fonction f continue sur $[a; b]$, la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Propriété 6.3 L'intégrale d'une fonction f continue et *positive* sur $[a; b]$ est l'aire du rectangle dont les côtés ont pour longueur μ et $b - a$:



$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \times \mu$$

Propriété 6.4 (Inégalité de la moyenne) Soit f une fonction continue sur $[a; b]$. On note m et M deux réels tels que pour tout $x \in [a; b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$. Alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Exercice 6.5 Déterminer la valeur moyenne de f sur I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \cos(2x)$, $I = [0; \pi]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $f(x) = 2x^2 + x - 2$, $I = [-1; 1]$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

A graph showing the functions $f(x) = e^x$ and $g(x) = e^{x/2}$ on a Cartesian coordinate system. The x-axis ranges from -1 to 1, and the y-axis ranges from 0 to 2.5. The area between the two curves is shaded: light blue for $x < 0$ and light red for $x > 0$. Vertical dashed green lines are drawn at $x = -1$ and $x = 1$. The curves intersect at the point $(0, 1)$.

- [illegible]

- [illegible]

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

- [illegible]

2. On pose, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{5})$

- (a) Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a : $\frac{1}{5}f(\frac{k}{5}) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5}f(\frac{k+1}{5})$

Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (b) En déduire que : $\frac{1}{5}S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5}(S_5 - 1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (c) Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et S_5 .

En déduire l'encadrement : $1,091 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq 1,164$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. (a) Démontrer que pour tout réel x de $[0; 1]$, on a : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (b) Justifier l'égalité $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx + I$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (c) Calculer $\int_0^1 (1-x)e^x dx$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(d) En déduire un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....